7 與奇人相遇的故事

數學經文

與奇人相遇的故事發生在它該發生的時候：你無法安排它，你無法使它發生。它是經由你的時時注意，耐心等待下，在一個不可預料的時、地忽然發生的；它不可能是在透過刻意培養或者經由頭腦強烈期待下誕生。

與奇人相遇會讓你有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到那問題的最後一塊拼圖；與奇人相遇也會讓你看到現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。

奇人就是隨身帶著火把，如影隨形，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。

葛吉夫為了追尋一套他們堅信過去存在、但如今所有的線索都渺無蹤影的知識，他與友人一起探索了中東及中亞一帶諸國。他將所遇見的奇人、奇事寫成一本回憶錄《與奇人相遇》。這是他對人生中遇到的那些奇人充滿敬意的回憶。為了緬懷一代催眠大師、靈性導師，就借用葛吉夫的書名《與奇人相遇》來作為這一章的標題“與奇人相遇的故事”。

題目：設 p,q,r 是三個滿足

$$0<p,q,r<1$$

的實數。證明

$$pq+qr+rp-2pqr<1.$$

為了避開車潮與人潮，今年（民國九十四年）提早回南部家裡過年，隨手將《與奇人相遇》的電子書載入我的 PDA 裡，打算趁著這趟返家之旅，好好拜讀一番。在高速公路上一路想著，葛吉夫書裡談到的八位奇人，肯定個個來頭不小，來個飛簷走壁，凌空取物，隔空治病，露一手什麼神通、分身之類的，應該不算什麼稀奇。即使沒這麼神，也

該個個具有低眉菩薩那種善心，或人人面帶睜眼金剛的威風。於是迫不及待的點著電子書閱讀，第一位奇人就是葛吉夫的爸爸“一位中亞細亞一帶頗有名氣的吟遊詩人”，讀完這一章好像沒有想像中那麼神奇，於是乎在車上睡著了。回家後，繼續閱讀第二位，第三位奇人，…，還是沒有讀到具有特殊超能力的人。經過兩天的辛苦閱讀，已經讀到第八位，也是最後一位奇人了，這位奇人叫皮歐特·卡本科，是一位採礦工程師，心裡想著，難道最後這位會有驚人的通天本領嗎？讀完之後，發現也沒有，讓我大失所望。書已讀完了，夜深人靜的晚上，只好練習著瑜珈消磨時間，當然也深思著《與奇人相遇》是一本探索內在旅程的書嗎？怎樣的人才配叫奇人呢？

《與奇人相遇》是葛吉夫寫的第二本書，他的第一本書叫《魔鬼說給孫子的故事》。這本書的目的只有一個，就是

「無情地摧毀許多世紀以來深植人心的信仰和觀念。」

如果我事先有讀葛吉夫的第一本書，我想我對奇人的定義也許會跟前面所期待的截然不同。

閒話講多了，回到這章的主題吧！“與奇人相遇的故事”是在描述或追憶過去十年來，在我的教學或演講現場，與我有過深深互動的幾位老師或同學。由於當時他對討論問題的瞥見，讓我得到了那個問題的最後一塊拼圖或者讓我看到一位現代阿基米得，光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」的神情。我把這與他交流的時刻稱做“與奇人相遇”，因為在這個特殊的問題與特殊的時間點上，他的確像是一位奇人，他有很出神入化的看法跟解讀。為了不讓這些瞥見消失，每次我都會在事後細心的回顧與整理當時的數學資料，讓我對這個數學問題的瞭解更上層樓。所以這些“奇人”是讓我數學進入另一個高度的最後一塊拼圖，他們就是師父中的師父。每當我在中學演講，講到那個數學問題，我都會想到他們那不可思議的瞥見，也會儘所有可能，將他們的瞥見傳遞給在場聆聽的每個人。

我之所以稱他們為奇人，就是因為在那些問題上，他們的表現與凡人大相逕庭。奇人不僅將問題看得透澈，引領問題的真理到科學的頭腦，甚至將問題的奧妙連結到我們的內

心，讓人們深受感動。數學家僅能將數學真理引導到人的腦，但師父卻可以將數學奧妙深入到人心，所以奇人就是師父。所謂凡人就是當他處在一間黑暗的房間時，他只能借助摸索跟推理去尋找燈的開關位置；而奇人就是隨身帶著火把，走到哪，亮到哪，摸索開關對他來說是多餘的。凡人總是喜歡隨身攜帶一長串的鑰匙，逐一嘗試哪把才能打開門鎖；而奇人就是隨身帶把萬能鑰匙而已，每個門鎖都難不倒他。

現在就讓我們一起來享受我與奇人相遇的往事，將奇人的想法透過我的筆描述出來。也為了感謝葛吉夫的書對我的影響與啟發，前三節就用他所寫的三本書的書名作為標題。

7.1 魔鬼說給孫子的故事

台大附近，汀州路旁，新店溪邊的師大分部是我大學讀書成長的地方，也是我從事教學、學術研究的地點。三月的暖陽從蟾蜍山上斜照全校園，來自全國的十來位數學資優學生，在數學館三樓的 M310 教室一起探索數學的奧秘，他們無暇欣賞這美景。吸收教授的數學課程，考好試，當選只有六個名額的國手才是他們此行的目的。《算術講義》是我所教授的一系列課程之統稱。在這課程裡，不僅教授代數、數論，也涵蓋一點組合、幾何與不等式。剩下十來人的課程安排，通常上課兩個小時，做練習一個小時。記得有一次，我給的練習是取自蘇聯的一道立體幾何問題，它是一道幾何不等式問題，看起來是道難題。

學生絞盡腦汁的想這個問題，我以愉快的心情巡視並欣賞他們的解題過程。通常能擠進這一關的女生僅有一兩位而已。奇蹟就發生在一位來自北一女的同學身上。在巡視的過程中，忽然在這位奇女子的考卷上看到「想要解決這道幾何問題，需先證明一個引理，利用這個引理就可以馬上解決這道問題。接下來敘述並證明這個引理」這樣的字眼。在做比較困難的數學問題時，“先證明一個有用的引理，再利用它證明問題本身”是常被使用的手法，對我來說，這不是意外之所在。讓我好奇的是「她對那個引理的證明」，簡直妙不可言。現在就讓我們來欣賞，這奇女子提出來的引理及對這引理的美妙證明。事實上，這位奇女子所提的引理就是本章第一頁的題目。至於它的證明，奇女子是這樣分析的：

奇女子對引理的瞥見

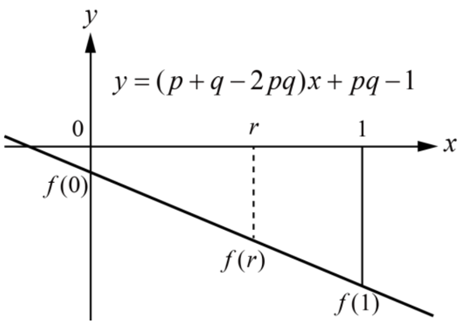
證明式子 $pq+qr+rp-2pqr-1$ 小於 0 即可。現在把該式的 p,q 視為固定的實數，把 r 當成變數，將式子整理成 $(p+q-2pq)r+pq-1$，並令直線方程式為

$$y=f(x)=(p+q-2pq)x+pq-1.$$

將 $x=0,1$ 分別代入，得

$$\begin{aligned} f\left(0\right)&=pq-1<0; \\ f\left(1\right)&=p+q-pq-1 \\ &=-\left(p-1\right)\left(q-1\right)<0. \end{aligned}$$

此直線的略圖為



因為直線在[0,1]區間的值恆為負數，所以

$$f(r)=(p+q-2pq)r+pq-1<0,$$

即

$$pq+qr+rp-2pqr<1,$$

得證。

為了讓敘述簡潔，溝通方便，或者為了引進一個較深入，不熟悉的概念，給個「定義」成為數學上克服這兩道難關的不二法門，例如「輾轉相除法」,「質數」就是為了這兩個目的才出現的名詞。但是，有時候太熟悉的名詞，反而忘了它的定義或從來沒給過定義，例如：叫你對「人」或「時間」給個定義，你可能會不知所措，不知如何是好，或者回想不起來何時學過他們的定義。這完全是因為頭腦只對困難的東西感興趣，對平凡容易或理所當然的事物漠不關心所導致的結果。我想了好久，勉強想出三個「人」的定義，

願意在這裡跟讀者分享：

① 從負面來思考，將「人」定義為「一種增胖容易，減肥難的動物」。不知道你對這樣的定義滿意嗎？

② 從自以為是的面向來思考，將「人」定義為「一種會作夢的動物」。你想過其它動物會作夢嗎？動物作夢的模樣又是怎樣的呢？

③ 從正面來思考，將「人」定義為「一種具有幽默感的動物」。你看過其它動植物具有幽默感過嗎？如果沒有，那幽默感肯定是人的一種天性，一種特色。人們輕易的擁有它，就應該時常使用它，不是嗎？

不知道讀者對上述三種定義滿意嗎？最好是自己也給一個不同的定義，領悟一下「平凡才是不平凡！」這句話的意思。這裡所要傳遞的訊息無非是：當你對平凡的事物無動於衷，無法給定義時，相信你對困難的事物也必定束手無策，不知如何是好才是。所以培養頭腦對平凡與不凡的概念或事物都有興趣，才是正確之道。

奇女子對這道不等式的驚人定義

$$y = f(x) = (p+q-2pq)x + pq - 1,$$

引領我們進入這道不等式的殿堂。對於這樣具有睿智的奇女子，相信她對平凡無奇的「人」這個字的定義，肯定比我的定義還不凡。真想聆聽她對「人」的定義。

7.2 與奇人相遇

到深坑老街吃豆腐，促進地方經濟繁榮，是每位台北人一生必做的功德之一。不過再深入一點，造訪繁華落盡的石碇東、西老街，可能就興趣缺缺了。我對石碇的第一印象是從電視台主播廖筱君的介紹性節目「石碇東街吊腳樓」得來的，印象中，她介紹在石碇東、西老街上捕捉美景的一些畫家。第一次造訪石碇是為了當地一所完全中學要招考高中數學教師的事宜與對新成立的高一資優班演講而來。校長的宿舍就建在學校內，背後是山坡，好像生活在深山一樣，學校連午餐都是自理兼自助式的。當年還年輕的我，真有一點嚮往。此行的目的就是出一份數學考題，讓學校招考高中部的數學老師。如果要

命一道不等式問題，最簡單莫過於拾人牙慧，我也常做這樣的事。我將上一節中，奇女子所發現的不等式引理（即本章的題目）當作此次考試的考題之一。事後閱卷時發現，這則不等式還真難，只有一位應試老師完全做出來，而且他的證法大大的讓我意想不到。這位男老師的證法是這樣的：

$\boxed{\text{男老師的瞥見}}$

將原來不等式重新詮釋如下：

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r<1\cdot 1\cdot 1.$$

幾何模型解釋如下：將

$1\cdot 1\cdot 1$ 視為 x,y,z 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積；

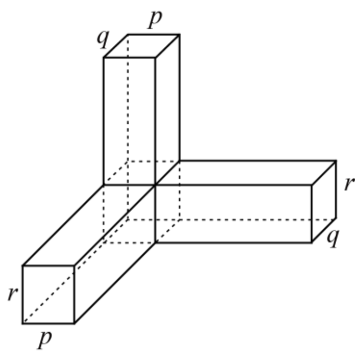
$p\cdot q\cdot 1$ 代表 x,y,z 軸正向上各取 $p,q,1$ 單位之長方體的體積；

$1\cdot q\cdot r$ 代表 x,y,z 軸正向上各取 $1,q,r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot 1\cdot r$ 代表 x,y,z 軸正向上各取 $p,1,r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot q\cdot r$ 代表 x,y,z 軸正向上各取 p,q,r 單位之長方體的體積。

那麼 $p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r$ 就代表如下圖所示的立體形狀之體積



因為這立體形狀在正立方體內，所以

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r<1\cdot 1\cdot 1.$$

利用幾何模型來解不等式問題，是相當高竿的思維。顯然在考試當下，除了必須對不等式所傳達的意思瞭若指掌外，還需瞬間連結到相應的幾何模型，這堪稱為無字證明的一個典範。為什麼我知道這位奇人是個男老師呢？這可是另一個故事的開始！之後沒多久，在一次的演講裡，一位高中老師跑來問我「有一道題目，他這樣解，不知道可不可以？」

就這樣我才認識這位奇人。

本章的題目在師大數學系的推甄也考過，下一練習就是當時一位學生的另一種證法，我把他的證法切割成兩個小題，方便讀者思考：

練習 1　設 p,q,r 是三個滿足

$$0 < p,q,r < 1$$

的實數。

(1) 證明

$$1 - r - pq + pqr > 0.$$

(2) 利用(1)證明

$$pq + qr + rp - 2pqr < 1.$$

如果你會做這個練習，你將體會到那位考生，將這不等式分割得多麼恰到好處。

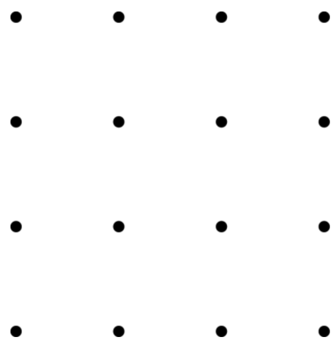
7.3 真實人生僅在當刻

透過遊戲的互動，傳達數學的概念，是我一直想做的事情。但是，恰當的數學遊戲不多見，不是坊間已有解答，就是無法精準的傳遞數學概念，或者遊戲本身不具有任何數學規律或意義。感謝以下這位奇人的幫忙，讓我對一道有興趣的遊戲有更上一層樓的理解，或者說找到那道遊戲的最後一塊拼圖也可以。

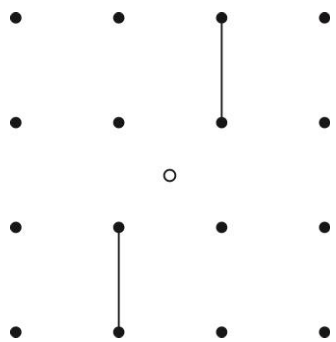
星期三下午，陰霾的天氣籠罩著台北城，即使天氣不好，也沒辦法澆熄建中學生對數學真理追求的熱情。每次到建中演講，我都喜歡採取不一樣的演講策略，或者說是一種試驗或試探的策略，在一般學校的演講，我不敢也不能採用這種模式。在“ㄇ”字形的演講場地，最適合讓學生玩數學遊戲，因為學生的互動容易，討論方便。建中的數理資優教室就是排成“ㄇ”字形。記得那次演講給了幾道數學遊戲，其中有一道叫「蓋房子」的遊戲：

下圖的 16 個黑點中，兩人輪流在左右或上下相鄰的兩個黑點中間畫一筆。如果正好有 4 筆圍成一個小正方形（稱它為一間房子），這房子是屬於畫第四筆的人所有。佔有最多

房子的人勝。



因為水平有 12 筆，鉛直也有 12 筆，共計 24 筆，所以 12 回合後遊戲結束，且一定有一人佔有比較多的房子（總共有 9 間房子），也就是說不會平手。學生兩人一組玩這道遊戲，不需花多少時間就可以大戰好幾回合。重點是如何識破這道遊戲的數學意義呢？如果沒有那種想要識破它的衝動跟企圖心，你就像多數人一樣，毫無目的的玩這道遊戲。說實話，我在給這道遊戲時，我只知道後玩者常常會贏，至於贏的策略是什麼？我仍在摸索中。所以給他們玩這道遊戲，可以說是一種試探，看看可不可以找到破題的人。在學生的喧嘩聲中，傳來很刺耳的兩個字。當下，我有如拈花微笑的迦葉一樣，瞬間開悟，找到這遊戲的最後一塊拼圖。當然，講出這兩個字的同學，稱他為現代阿基米得也不為過，他的神情就像光溜溜的跳出浴缸大喊「我發現了」一樣。究竟那兩個字有這麼大的魔力，可以破題呢？讓我們用下圖來告訴你那兩個字是什麼（細黑線是先玩者，粗黑線為後玩者）：



練習 2　真希望你能拈花微笑的說出那兩個字。

數學家彼得·郞斯賓斯基，葛吉夫的重要門徒，以驚人的記憶力，完整記錄了當時葛吉

夫的授課內容，並將它寫成《探索奇蹟》這本書。這是我喜愛的一本精神食糧，就以這書名當下一節的標題：

7.4 探索奇蹟

每年冬天，來趟花蓮之旅，幾乎成為例行公事。住英雄館，或宿美人館，便宜又方便，而且散步就可以到達液香扁食店，吃碗扁食是那晚必做的晚課。白天散步在花蓮港邊的腳踏車步道，想著悠游在海裡的翻車魚，生長在山邊的芋頭，真讓人食指大動。回家時可別忘了帶點曾記麻糬或百年老店惠比須的花蓮薯。有位邱姓大學同學住花蓮真好，每次都帶給我不同的體驗。記得有一次，晚上開車帶我到花蓮的山上品茶看花蓮夜景，讓我留下很深刻的印象;更有一次,帶我到遠來大飯店眺望整個花蓮地區燈火通明的景色。當然，到光復糖廠吃冰或安通洗溫泉也是不可免的啦。

每次到花蓮出差，心情特別愉快，除了當作散心外，參與數學競賽的宜、花、東考生也不是很多，無論是口試或閱卷都輕鬆。記得有一次，一道題目是這樣出的：

設實數 a_1,a_2,b_1,b_2 滿足 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2 > 0$ 及 $a_1a_2 \ge b_1b_2$。試證明：不等式 $a_1+a_2 \ge b_1+b_2$ 成立。

基本上,這並不是一道難題,學生作法五花八門都有,不過都離不開把 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2 > 0$ 想成數線上的五個點，或者把 $a_1a_2 \ge b_1b_2$ 看成兩個矩形的面積關係，這兩種容易聯想到的出發點。閱卷時發現一位同學利用分數的想法來處理，讓我有點意外。或許是學數論的我對“數”特別敏感，在口試時，問得更詳細一點，就得知這位男同學的整個想法，現在把他的奇想寫下，供讀者參考：

男同學的瞥見

將 $a_1a_2 \ge b_1b_2 > 0$ 想成分數大小關係，得

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{b_2}{a_2}.$$

將兩邊同時減 1，得

$$\frac{a_1}{b_1} - 1 \geq \frac{b_2}{a_2} - 1 \Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \geq \frac{b_2 - a_2}{a_2}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq \frac{b_1}{a_2}.$$

利用 $b_1 \geq a_2 > 0$（即 $\frac{b_1}{a_2} \geq 1$），得

$$\frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \geq 1.$$

由 $a_1 - b_1 \geq 0, b_2 - a_2 \geq 0$ 得

$$a_1 - b_1 \geq b_2 - a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2,$$

得證。

練習 3　如果要求利用矩形面積的想法來證明這不等式，你有辦法完成嗎？

7.5 來自巨人的投射

「站在巨人的肩上，可以看得更遠；來自巨人的投射，可以照得更亮」是學數學的人渴望有的際遇，想要獲得的加持；但是，巨人的肩膀容易攀爬嗎？巨人的“數光”會普照在每個人身上嗎？這裏要講的這道題目，其背後隱藏著一段與巨人有關的歷史；但是這題目本身卻只是巨人投射之下的一個簡單產物。雖然是個簡單的特例，但想要巧妙解決它，也必須是個奇人才辦得到。就讓我們開始吧！

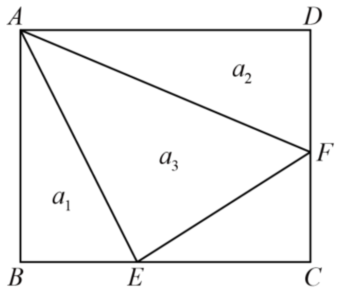
那是一個寒冷的午後，辦公室的電暖氣帶來一絲暖意，幫我工作的助理正打著電腦。幫我工作的助理有兩類，用嚴肅一點的話說，就是「有給職助理」與「無給職助理」兩種，有給職助理是數學系的大學生居多。這幾年經濟不是很好，清寒的優秀學生，可以當我

的有給職助理，除了寒暑假幫我寫解答，校對數學資料，試讀一些文章外，最重要的要求，也是唯一條件，就是學期成績至少要達到八十五分以上（告訴你們一個秘密，其實她們常常都超過九十分，比我大學成績都還好）。至於無給職助理就是願意幫我，做牛做馬般，讀校第一手資料的老師了，順便對我的文章給些建議及看法，很感謝她們的付出。

手邊正在處理這期問題集的投稿，像過去一樣，快速的翻閱著老師或學生們的解答。說時遲，那時快，手與腦筋同時定格在一則吸引我的解答上，這在過去是從未發生過的事，原來這是個妙解，肯定出自奇人之手。心中雖然高興，為了順便檢定一下助理的功力，嘴裡說著「這幾個解答回去讀一下，把好的解答打下來」。這是我常用的一種測試，助理們大多不會讓我失望。幾天後，助理告訴我「那個解答特別妙，值得推薦，但是想不通那位老師如何想到這樣的解法」。就在幾天前，一個更寒冷的午後，在拜訪淡江鄭惟厚教授的路上，問題集企劃提起那個我建議刊登的解答，我半開玩笑的建議，應該在該解答的右上角加上一個“獎”字。

說到這妙解的題目那就更妙了，約莫半年前，彰師大科教中心主辦一場「中區數學新知研討會」，邀請我給個演講，希望談一些可以給中學教師拿去當科展教材，又具有數學深度的題目。這讓我想起很久以前，在一本書裡看到，談論有關高斯五邊形面積公式的問題。印象中，它好像是說：「給定任意五邊形，相鄰三個頂點所形成的三角形稱為基本三角形，一共有五個基本三角形。高斯證明：五邊形的面積可以用這五個基本三角形的面積來表示。」至於如何表示，書裡並沒有細講了。經過我搜尋國外數學網站的結果，好不容易找到一篇談論“高斯五邊形面積公式”的文章。事實上，這五邊形的面積恰好是某個以基本三角形面積為係數的二次方程式之一根。有了這些資料，我就開始寫演講的講義。又有一個問題產生了，我不想一開始就導進高斯這個複雜的公式，想要先引一個簡單的例子，但相應的例子哪裡找呢？還好，在大陸《中學生數學雜誌》與北一女的數學競賽題目裡，我發現了一點跡象。站在巨人高斯的肩上（將面積與一元二次方程式扯上關係），我把這跡象投射到四邊形上，得到如下的例子：

如下圖所示：$ABCD$ 是面積為 S 的矩形，a_1,a_2,a_3 分別代表所在三角形區域的面積。



證明：

$$S^2-2a_3S-4a_1a_2=0.$$

這就是數學問題集裡的題目敘述，同時也是那場演講的開胃菜。曲終人未散，戲棚下站久就是你的，為了回饋你的耐心跟毅力，我們就把奇人的智慧馬上揭曉吧！

$\boxed{\text{投稿者的瞥見}}$

將四條線段 CD,CB,CE,CF 配對相乘，得到等式

$$(CD\times CB)\cdot(CE\times CF)=(CD\times CE)\cdot(CB\times CF).$$

將它們轉換成面積，得

$$S\cdot(2(S-a_1-a_2-a_3))=(S-2a_1)\cdot(S-2a_2).$$

整理得到

$$S^2-2a_3S-4a_1a_2=0.$$

放個馬後炮，整個問題的關鍵點就是 E,F 兩個點，所以考慮從 C 點畫出的四條線段 CD,CB,CE,CF 的不同配對乘積是合情合理的想法。

練習 4　將二次方程式的兩個根求出，並確認何者才是面積 S 的值。

練習 5　當你具有投影面積的素質或向量內積的知識時，應該想想看！將矩形改成平行

四邊形，這個恆等式是否依然成立。投稿者的解釋仍然適用嗎？

7.6 “ 9－3＝+6 ” ！

這裡要分享的奇人是我的一位親戚，“9－3＝+6 ”是她刻骨銘心，一輩子也忘不了的算術題目。

三叔是個忠厚老實的人，三嬸是個傳統鄉村婦女，養兒防老，生男傳宗接代是她們根深蒂固的中心思想。在這個大家不想增產報國的年代，實在很難想像她們為了求得一子，竟然連生九位千金，最後還是沒生出個兒子來。因為家計因素，只好將三個女生送給別人撫養。養育六個孩子也不是件容易的事，記得大學時，接到三嬸大女兒的一封信，大意是說“三嬸不准她補習重考大學，請我跟她媽求情”。人在台北的我，不容易馬上回南部跟三嬸講，就這樣拖過去了。雖然堂妹後來還是念了大學，但是心中總是有一份虧欠。

小時候對三嬸最深刻的印象是，每當生產時，虛弱的三嬸總是急著問在旁邊幫忙的我媽“是男生還是女生？”我媽的回答總是“生了就好”，此時三嬸就大聲哭了起來。有幾次還說出“大嫂,拿棉被把小孩子悶死算了”這樣的氣話,接下來還給哭幾個禮拜才行。

現在三嬸的女兒都嫁出去了，孫子滿堂。今年過年時，我媽說三嬸現在很幸福，因為三嬸前一陣子驕傲的跟她說“現在每天幫孫子洗澡,能洗到孫子的 LP 是我此生最大的幸福！”。我聽了之後哈哈大笑。

如果要學數學的我幫三嬸的人生下個標題，那就是“9－3＝+6 ”這道算術方程式。旁觀者可能把它當普通減法來看待，身歷其境的我確有不同的解釋：數字 9 是三嬸執著的極限；–3 代表她此生所必須背“負”對三個孩子無法彌補的虧欠；+6 則是晚年苦盡甘來的“正”向人生，這也「是」她應得的善果。看似簡單的算術，但對文盲的三嬸來說，這道人生運算方程式，她可是點滴在心頭。但願三嬸已悟得葛吉夫的書名《真實人生僅在當刻》。

這篇文章寫於民國九十四年新年前夕，我要再次感謝葛吉夫對我的啟發，讓我完成一篇

很不一樣的數學文章。我要再次的說明，這文章只是要傳達《魔鬼說給孫子的故事》裡的唯一目的，就是

「無情地摧毀許多世紀以來深植人心的信仰和觀念。」

這個目的不僅內在旅程適用，數學之旅也合宜，大家可以想想。

與奇人相遇的故事的練習題解答

練習 1

(1) 因為$1-r-pq+pqr=(1-pq)(1-r)$，又 $pq<1, r<1$，所以

$$1-r-pq+pqr>0.$$

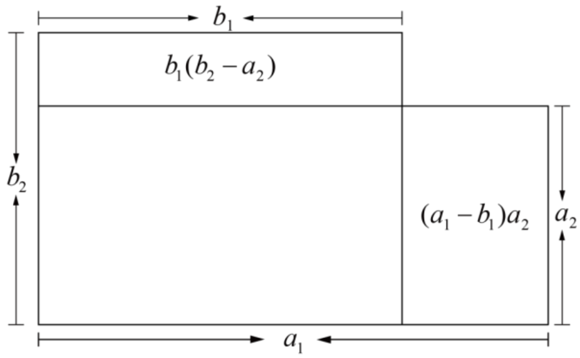
(2) 利用(1)得

$$\begin{aligned}1-\left(pq+qr+rp-2pqr\right) \\ &=\left(1-r-pq+pqr\right)+r\left(1-p-q+pq\right) \\ &>0+r\left(1-p\right)\left(1-q\right) \\ &>0+0=0,\end{aligned}$$

即 $pq+qr+rp-2pqr<1$。

練習 2

考慮下圖：



由面積不等式$a_1a_2\geq b_1b_2$推得另一面積不等式

$$\begin{aligned}(a_1-b_1)a_2\geq b_1(b_2-a_2) &\Rightarrow \frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}\geq\frac{b_1}{a_2}\geq 1 \\ &\Rightarrow a_1-b_1\geq b_2-a_2 \\ &\Rightarrow a_1+a_2\geq b_1+b_2.\end{aligned}$$

練習 3

對稱。

練習 4

$$S = a_3 + \sqrt{a_3^2 + 4a_1a_2}$$

練習 5

將奇人的乘積修改成向量內積，得

$$\left(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB}\right)\left(\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CF}\right)=\left(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CE}\right)\left(\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CF}\right).$$

再將每一相乘項轉成對應的面積公式。

利用投影知識，可先將平行四邊形以適當的角度投影成矩形，再利用投影時，面積的轉換公式，就知道原等式還是相等的。